リーマン面の接続のある問題への擬等角写像の応用 (擬等角写像とリーマン面)

及川, 廣太郎

数理解析研究所講究録
364巻 1979年 52-65

リーマン面の接続のある問題への擬等角写像の応用

東大 教養　　及川廣太郎

1. S_0をリーマン面とする。もしS_0から、あるリーマン面Sの部分領域の上への等角写像φが存在するとき、(S, φ)のことをS_0の<u>接続</u>という。もし$\varphi(S_0) \neq S$ならば、接続はプロパーであるという。もしプロパーな接続がないならば、S_0は<u>極大</u>リーマン面という。S_0の接続(S, φ)は、もしSが極大リーマン面ならば、S_0の<u>極大接続</u>という。任意のS_0に対して、その極大接続が存在することが知られている[5]。

S_0が"唯一つの"極大接続を持つのは、どのような場合か、という問題を考えるのであるが、"唯一つ"という概念に異なったものが3つある。

S_0の極大接続(S_i, φ_i), $i=1,2$, に対し、$\varphi_1(S_0)$から$\varphi_2(S_0)$の上への等角写像$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$が、もしつねに$S_1 \to S_2$の位相写像に接続できるとき、$S_0$の極大接続は<u>topologically unique</u>であるという。同じく、もしつねに$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$が$S_1 \to S_2$の等角写像に接続できるとき、$S_0$の極大接続は

conformally unique であるという．最後に，もし S_0 の極大接続 (S_i, φ_i), $i=1, 2$ において，つねに S_1 と S_2 とが等角同値ならば，S_0 の極大接続は unique であるという．この際は，S_1 から S_2 への等角写像は，$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ とは無関係としてある．

われわれは，これらのうち第3の場合を問題にする．S_0 の極大接続が unique であるための必要十分条件を求める．

2．この種の問題のはじまりは，筆者の知る限りでは，つぎの Nevanlinna による "Eindeutigkeitssatz" であろう（[10]）：平面領域 S_0 に於て，そこからリーマン球 $\mathbb{P}$ の部分領域の上への等角写像が，つねに $\mathbb{P} \to \mathbb{P}$ の等角写像（つまり一次変換）に拡張できるための必要十分条件は，S_0 が class O_{AD} に属すること（つまり，Dirichlet 積分が有限であるような非定数の正則関数は存在しないこと）である。

この結果は，後述の Heins の定理を参照するならば，つぎのものと同値である：平面領域 S_0 の極大接続が conformally unique であるための必要十分条件は，$S_0 \in O_{AD}$ である．

森 [9] は，これを，次のところまで拡張した：種数

<u>有限なS_0の極大接続が conformally unique であるための必要十分条件は，$S_0 \in O_{AD}$ である.</u>

一般の種数に対しては，S_0 が class O_{AD} であるという条件は，かなり様子が異ってくる．今扱っている問題に関しては，つぎのような条件を考えると，話がうまくいく：リーマン面 S_0 が<u>条件 A</u> をみたすとは，S_0 の任意の regularly imbedded subregion Ω は，もしそれの relative boundary $\partial\Omega$ がコンパクトであるか，或いはそれの $\partial\Omega$ に関する double $\hat{\Omega}$ が planar ならば，$\hat{\Omega}$ は class O_{AD} に属する．（S_0の種数が有限なら，$S_0 \in O_{AD}$ と条件 A とは同値である）.

この言葉を用いると，次の定理が得られる：<u>リーマン面S_0の極大接続が conformally unique であるための必要十分条件は，S_0 が条件 A をみたすことである.</u> これは Jurchescu [8] によるものである；ただし，このままの形であるわけではないが，この論文中の二・三の定理を組みあわせると Corollary 16 が，ちょうどこれに相当する。

平面領域 S_0 が O_{AD} に入るための特徴づけとして，S_0 から $\mathbb{P}$ の部分領域の上への任意の等角写像に対して，$\mathbb{P} - f(S_0)$ の 2次元測度 $m(\mathbb{P} - f(S_0))$ が 0 であるということがある (Ahlfors-Beurling [3]). このこと

の一般化は, 誰が最初に述べたことか, はっきりしないが, Renggli [14] には定理2として述べられている: リーマン面 S_0 の極大接続が conformally unique であるための必要十分条件は, 任意の極大接続 (S, φ) に対して $m(S-\varphi(S_0))=0$ が成り立つことである。

3. つぎに, topologically unique であるが, 馴れた読者なら, ここまで読んだところで, O_{AD} の代りに O_{SD} $(=O_{SB})$ をとればよいということに気がつかれることと思う. じっさい, 次の定理は Jurchescu [8] の定理21である: リーマン面 S_0 の極大接続が topologically unique であるための必要十分条件は, 任意の regularly imbedded subregion Ω で, $\partial\Omega$ に関する double $\hat{\Omega}$ が planar なものは, つねに $\in O_{SD}$ であることである.

S_0 の種数が有限ならば, この条件はもっと簡単に述べることができる。たとえば, 閉リーマン面から N_{SD} class のコンパクト集合を除いたもの, といってもよいし, または S_0 の ideal boundary component はすべて weak である, といってもよい (Sario-Oikawa [17]).

4. 以上の topological uniqueness, conformal uniqueness は，写像の接続，いいかえれば特異点の除去可能性の問題であったが，2つの uniqueness は様子が異なる。勿論，conformally unique なら unique であるが，問題は逆の証明である。

この種の問題の出発は，つぎの Heins [6] による定理である： 平面領域 S_0 が，種数 > 0 のリーマン面の部分領域と等角同値であるための必要十分条件は，S_0 が有界単葉正則関数を持たないことである。これには，Jenkins [7]，Rochberg [16] による別証がある。

この結果を一寸変形すると，つぎのようになる：

定理1 (Heins) 平面領域 S_0 の極大接続が unique であるための必要十分条件は，$S_0 \in O_{SD}$ である。

1960年，筆者はつぎのことを証明した [12]：

定理2. 種数が > 0 で $< \infty$ であるようなリーマン面 S_0 の極大接続が unique であるための必要十分条件は，$S_0 \in O_{AD}$ である。

ここでは，これを拡張した次の定理を証明する：

<u>定理3. 種数が>0（つまり planar でない）リーマン面S_0の極大接続が unique であるための必要十分条件は，S_0が条件Aをみたすことである。</u>

5. 定理2と3において，十分性は，conformally unique に関する条件からすぐ証明できる。

必要性を証明するために，次のように考える。いまS_0が条件Aをみたさなかったとする。すると極大接続は conformally unique ではないから，2°の最後で述べた命題によって，つぎのような極大接続(S, ψ)が存在する：$m(S-\psi(S_0))>0$. コンパクト集合$E\subset S-\psi(S_0)$を，どんなに小さくてもよいが，$mE>0$であるようにとってとり，この部分のみでSの解析構造をかえる。即ち，support がEに含まれるような，S上のBeltrami 微分$\mu\, d\bar{z}dz^{-1}$によりリーマン面S^μを考える；ここでS^μは，位相空間としてはSと同じものであるが，恒等写像ιはμ-等角写像となっているものである（Bers [4]）. すると，ιは$S-\psi(S_0)$では

等角であるから $(S^\mu, 2.4)$ は S_0 の接続である。擬等角写像は極大性を保存する（[11]）から，これは S_0 の極大接続である。従って，もし S^μ が S と等角同値でない（ような μ が存在する）ならば，S_0 の極大接続は unique でないことになって，定理2，3の証明が完了することになる。

よって，定理2と3の証明は，次の定理に含まれる（S が種数 >0 で極大なら，定理4の仮定をみたす）：

定理4. リーマン面 S は，リーマン球から n $(0 \leq n \leq 3)$ 個の点を除いたもの，単位円板から n $(0 \leq n \leq 1)$ 個の点を除いたものではないものとすると，$mE > 0$ であるような任意のコンパクト集合 E に対し，

$$\|\mu\|_\infty < 1, \quad \mathrm{supp}\, \mu \subset E$$

であるような S 上の Beltrami 微分をとり，S^μ が S と等角同値でないようにすることができる。

6. 定理2を証明するときは，定理4を，S が種数 >0 の閉リーマン面について証明すればよい。このときは，S 中心の Teichmüller 空間を考え，$\mathrm{supp}\, \mu \subset E$

であるような S^μ の全体は，S を内点に含むことが示せる。Teichmüller 空間において，moduli 空間上の各ファイバーは discrete な集合であるので，以上によってこの場合の定理4の証明が終る（以上[12]の方法）。

ところが，このやり方は，一般の S に対しては通用しないのである。何故ならば，一般には，$\mathrm{supp}\,\mu \subset E$ であるような S^μ のみでは，S の近傍を埋め得ないのである。反例はつぎのとおりである（若林功，谷口雅彦両氏による）。

反例1. $S = \mathbb{C} - \{1, 2, \cdots\}$, $S_\varepsilon = \mathbb{C} - \{1+i\varepsilon, 2, 3, \cdots\}$ とする。ε が近いと S_ε は（Teichmüller 距離で測って）S の近くにある。にもかかわらず，$S \to S_\varepsilon$ の擬等角写像で，あるコンパクト集合を除いて等角であるものは，存在しない；$1+i\varepsilon$ に対応する点がありえないことが示せるのである。

反例2. 上記の S を2枚用意して，分岐点2つずつを切り込みで結び，これらに沿って2枚を貼りあわせる。それを $\hat{S}$ とすると，S_ε から同様に作った $\hat{S}_\varepsilon$ に関して，上と同様なことがいえる。つまり，$\hat{S}$ の近傍は，$\mathrm{supp}\,\mu$ がコンパクトな集合に含まれているような $\hat{S}^\mu$ では埋め得ない。なお，この $\hat{S}$ は極大リーマン面である（Radó [13]）。

7. 筆者は，はじめ，一般の場合の定理4も，6°のはじめの方で述べたような方法で証明しようとしたのであるが，反例が出るに及んで，あきらめざるを得なかった。

その内，1975，Renggli [15] が定理3の証明を与えた。彼の方法は conformal sewing というものを用いるものである。

彼の証明をよむうちに，つぎのことに気がついた。すなわち，定理4は次の定理に含まれる：

定理5. S と E とは，定理4と同じものとするとき，S 中心の Teichmüller 空間 $T(S)$ 上の連続関数 Φ と，$\mathrm{supp}\,\nu \subset E$ であるような S 上の Beltrami 微分 $\nu\, d\bar{z}\, dz^{-1}$ で，条件

(i) $T(S)$ の moduli 空間の S の上の fiber における Φ の値域は，可算集合

(ii) $\left.\dfrac{d}{dt}\Phi(\langle S^{t\nu}, \iota\rangle)\right|_{t=0}$ は存在して $\neq 0$.

をみたすものが存在する。

この定理から定理4を導くことは，つぎのように，容易である。即わち，曲線 $t \in [0, t_0] \longmapsto \langle S^{t\mu}, \iota\rangle \in T(S)$，

ただし $0 < t_0 = 1/\|\nu\|_\infty$，の上で Φ の値域は区間，よってこの曲線は S 上の fiber に含まれてしまうわけにはいかない。従って，ある $t \in (0, t_0]$ に対して $S^{t\nu}$ は S と等角同型になれない。この $t\nu$ が，定理4での μ である。

さて，定理5の証明であるが，Φ として，はじめは周期微分のノルムなどを考えていたが，つぎに示すように，甚だ簡単なものでよいことがわかった。

8. <u>定理5の証明.</u> S が torus の場合だけを，別にやらなければならない。これは，下記のものを技術的に変形するのであるが，くわしくは読者にゆだねたい。

それ以外の場合の S は，上半平面 H_+ の non-elementary な Fuchs 群 Γ で，楕円的変換を含まないもの，によって，$S = H_+/\Gamma$ とあらわすことができる。一般性を失うことなく，0 と ∞ は，ひとつの双曲的変換 $\gamma_0 \in \Gamma$ の不動点（それぞれ，repelling と attracting な），1 はもうひとつの双曲的変換 $\gamma_1 \in \Gamma$ の repelling な不動点と仮定してよい。γ_1 の attracting な不動点を a とおく。

S 上の Teichmüller 空間の代りに，Γ 上の Teichmüller 空間 $T(\Gamma)$ を考える。それは，$H_+ \to H_+$ の

擬等角写像 f で，$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(\infty)=\infty$，さらに $\forall\gamma \in \Gamma$ に対して $f\gamma f^{-1}$ が1次変換となっているものすべてからなる空間を，R で一致するもの同志を同値とする関係によって，類別して得られるものである。同値類を $\langle f\rangle$ とあらわす。関数

$$\Phi \quad : \quad \langle f\rangle \longmapsto f(a)$$

は $T(\Gamma)$ で定義される（実数値）連続関数である。

H_+/Γ と $H_+/f\Gamma f^{-1}$ とが等角同型であるような f の $\langle f\rangle$ の全体を $\mathcal{F}_\Gamma$ とあらわす（moduli 空間上の fiber である）。$f\in\langle f\rangle\in T(S)$ に対し $\langle f\rangle\in\mathcal{F}_\Gamma$ であるための必要十分条件は，適当な一次変換 l によって $f\Gamma f^{-1}=l\Gamma l^{-1}$ が成り立つことである。従って，$(l^{-1}f\gamma_0 f^{-1}l,\ l^{-1}f\gamma_1 f^{-1}l)\in\Gamma\times\Gamma$ が得られる。この対は，$\langle f\rangle$ からの f のとり方にはよらない；ただし l のえらび方には関係する。いま，$\langle f_1\rangle,\langle f_2\rangle\in\mathcal{F}_\Gamma$ に対して，それぞれ適当に l_1, l_2 をとって得られる，上記の対が一致したとする：$l_1^{-1}f_1\gamma_i f_1^{-1}l_1=l_2^{-1}f_2\gamma_i f_2^{-1}l_2$，$i=0,1$。すると，$\gamma_0, \gamma_1$ の不動点 $0, 1, \infty$ をしらべることによって，$l_1=l_2$ を得，従って $f_1(a)=f_2(a)$ を得る。よって，関数 Φ の $\mathcal{F}_\Gamma$ での値域は，$\Gamma\times\Gamma$ の濃度，つまり可算，をこえない。

//

$\Phi(\langle f^{t\nu}\rangle) = f^{t\nu}(a)$ については, Ahlfors-Bers[2] によって示されているように

$$\frac{d}{dt}f^{t\nu}(a)\Big|_{t=0} = \frac{-a(a-1)}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\nu(z)\,dx\,dy}{z(z-1)(z-a)}$$

である; ここに $\nu(z)$ は有界可測関数で, $\nu(\bar{z}) = \overline{\nu(z)}$, そして H_+ では $\nu(\gamma(z))\overline{\gamma'(z)}\gamma'(z)^{-1} = \nu(z)$ を $\forall\gamma \in \Gamma$ に対してみたすものとする。

Sに与えられたEを, H^+ の Γ の基本領域内にもちあげ, そこで $\nu(z) = 1/\bar{z}(\bar{z}-1)(\bar{z}-\bar{a})$ とおく。次に $\Gamma(E)$, およびそれの下半平面への鏡像へは, 上述の関係式が成り立つように拡張し, $\mathbb{C}$ のそれ以外の部分では 0 とおくと, これは S 上の Beltrami 微分とみて $\mathrm{supp}\,\nu \subset E$ であり, しかも, 上式の右辺を 0 にしない。つまり, このようにしてもとめた Φ と ν が, 定理5で要求されたものである。 (証終)

文献

[1] Ahlfors, L. V. Lectures on Quasiconformal Mappings. D. Van Nostrand Co., Inc., 1966.

[2] Ahlfors, L. V. and Bers, L. Riemann's mapping theorem for variable metrics. Ann. Math. 72 (1960), 385-404.

[3] Ahlfors, L. A. and Beurling, A. Conformal invariants and function-theoretic null-sets. Acta Math. 83 (1950), 101-129.

[4] Bers, L. Spaces of Riemann surfaces. Proc. Math. Congr. Edinburgh, 1958, pp. 349-367.

[5] Bochner, S. Fortsetzung Riemannscher Flächen. Math. Ann. 98 (1928), 406-421.

[6] Heins, M. A problem concerning the continuation of Riemann surfaces. Contribution to the Theory of Riemann Surfaces. Princeton Univ. Press, 1953, pp. 55-62.

[7] Jenkins, James A. On a result of M. Heins. Proc. Edinbugh Math. Soc. (2) 19 (1974/75), 371-373.

[8] Jurchescu, M. Bordered Riemann surfaces. Math. Ann. 143 (1961), 264-292.

[9] Mori, A. A remark on the prolongation of Riemann surfaces of finite genus. J. Math. Soc. Japan 4 (1952), 198-209.

[10] Nevanlinna, R. Eindeutigkeitsfragen in der Theorie der konformen Abbildung. Comptes Rendus 10, Congr. Scand.,1946.

[11] Oikawa, K. Some properties of quasi-conformal mappings. Sūgaku 9 (1957/58), 13-14. Japanese.

[12] ---"--- On the uniqueness of the prolongation of an open Riemann surface of finite genus. Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), 785-787.

[13] Radó, T. Über eine nicht fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit. Math. Z. 20 (1924), 1-6.

[14] Renggli, H. On romovable sets for conformal mappings. Ann. Math. 176 (1968), 517-323.

[15] ---"--- Structural instability and extensions of Riemann surfaces. Duke Math. J. 42 (1975), 211 - 224.

[16] Rochberg, Richard. Continuation of Riemann surfaces. Proc. Amer. Math. Soc. 48 (1975), 82 - 84.

[17] Sario, L. and Oikawa, K. Capacity Functions. Springer Verlag. 1969.